Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2012/13, Serie 4
Prof. Dr. G. Wang — 12.11.2012
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $A_n \in \mathcal{A}$.
(a) Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} A_n$, $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$. (Die Definitionen des Limes Superiors und des Limes Inferiors finden Sie in der Aufgabe 2, Serie 2)
(b) Sei $\mu(\cup_{k\geq N} A_n) < \infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
(c) Zeigen Sie $\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ ein äußeres Maß und sei $\mathcal{M}$ das System der μ-messbaren Mengen. Seien $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to [0, \infty)$ und die Relation $\sim$ definiert durch

$$d(A, B) := \mu(A \triangle B), \quad A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $(M/\sim, d)$ ein vollständiger, metrischer Raum ist. (vgl. Aufgabe 1, Serie 3)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Jede abgeschlossene Teilmenge des $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Borelsch, also des Lebesguesche Maß $\mathcal{L}^n(A) \to [0, \infty]$ definiert.
Man untersuche, ob folgende Funktion $\eta : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß ist:

$$\eta(A) := \mathcal{L}^n(\overline{A}).$$

Dabei bezeichnet $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle von A.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei (X, A, μ) ein Maßraum. Man nennt $A \in \mathcal{A}$ μ-Atom, wenn $\mu(A) > 0$ und wenn für jedes $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ gilt $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A \backslash B) = 0$. Man zeige:
(i) Es sei A ein μ-Atom mit $B \in \mathcal{A}$ und $B \subset A$. Dann gilt entweder $\mu(B) = \mu(A)$ oder $\mu(B) = 0$.
(ii) Es sei $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$. Ferner gelte für jedes $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ entweder $\mu(B) = \mu(A)$ oder $\mu(B) = 0$. Dann ist A ein μ-Atom.
(iii) Es seien μ σ-endlich und $A \in \mathcal{A}$ ein μ-Atom. Dann gilt $\mu(A) < \infty$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 19.11 bis 12:00**.